УДК 681.327.11

Н. В. Сачанюк-Кавецька, О. П. Прозор

ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОГО ОПИСУ ЛОГІКО-ЧАСОВИХ ФУНКЦІЙ БАГАТОЗНАЧНОЇ ЛОГІКИ ТА ОКРЕМИХ ОПЕРАЦІЙ НАД НИМИ

Вінницький національний технічний університет, Вінниця

Анотація. В статті зазначено, що математичне та комп'ютерне моделювання є основним інструментом дослідження складних динамічних процесів та систем. На рівні обчислювальних пристроїв час є критерієм для впорядкування послідовності операцій і носить неявний характер, а для конкретних вузлів час забезпечує їх правильну роботу і представлений на рівні тактів чи синхроімпульсів. В роботі показано доцільність ідеї заміни довільного цифрового сигналу (змінної), що змінюється в часі, часовою логічною функцією, яка дає можливість полегшити попередню аналітичну обробку цифрових сигналів та змінних, використовуючи властивості таких функцій. В статті представлено новий математичний апарат опису логіко-часових функцій багатозначної логіки та окремих операцій над ними з використанням моделювання відомих схем реалізації. Запропонована індексна форма подання функцій, яка досить легка для сприйняття і дає змогу розглядати будь-які логіко-часові функції як числову послідовність. В якості базових операцій розглянуто операцію заперечення Лукасевича та операцію зсуву, які дозволять, в подальшому, ввести більш складні операції над логіко-часовими функціями багатозначної логіки, такі як нерівнозначність, диференціювання та інтегрування і дослідити їх властивості.

Ключові слова: логіко-часова функція багатозначної логіки, продукуюче слово, індексна форма, оператор впорядкування за часом.

Abstract. The article states that mathematical and computer modeling are the main tools for studying complex dynamic processes and systems. At the level of computing devices, time is a criterion for streamlining the sequence of operations and is implicit, and for specific nodes, time ensures their proper operation and is represented at the level of clocks or clock pulses. The paper shows the expediency of the idea of replacing an arbitrary digital signal (variable) that changes over time with a time logic function, which allows to facilitate the preliminary analytical processing of digital signals and variables using the properties of such functions. The article presents a new mathematical apparatus for describing logic-time functions of multivalued logic and individual operations on them using modeling of known implementation schemes. An index form of representation of functions is proposed, which is quite easy to understand and allows to consider any logical-temporal functions as a numerical sequence. Lukasevich's negation operation and the shift operation are considered as basic operations, which will allow to introduce more complex operations on logical-temporal functions of multivalued logic, such as inequality, differentiation and integration, and to investigate their properties.

Keywords: logical-temporal function of multiple-valued logic, productive word, index form, time-ordering operator.
DOI: https://doi.org/10.31649/1999-9941-2022-53-1-111-118.

Вступ

Історія обчислювальних пристроїв доводить, що їх розвиток базується на необхідності прискорення обчислень та на розширені функціональних властивостей цих пристроїв. Більше того, одним з головних напрямків науково-технічного прогресу є розвиток методів та засобів обчислювальної техніки. Використання методів математичного моделювання та комп'ютерного розв'язування інженерних та наукових задач дозволяє значно підвищити ефективність процесів проектування, розпізнавання, обробки та управління. Математичне комп'ютерне моделювання стало головним засобом дослідження складних динамічних процесів і систем.

Сьогоднішні комп'ютери по своїй суті універсальні, за винятком тих, що призначені для управління якимись технологічними процесами в широкому розумінні цього слова. Ця універсальність потребує спеціальних алгоритмів для вирішення конкретних задач. Часто алгоритми не повністю враховують особливості зміни процесів у часі, що приводить до помилок в прогнозуванні їх майбутнього розвитку. Для усунення подібних недоліків потрібен математичний апарат, що описує поведінку взаємозв'язаних процесів у часі.

Існує великий клас процесів, що змінюються в часі і які можна описати бінарними чи k-значними логічними функціями. Спроби ввести часову змінну в бінарні логічні функції [1, 2, 3]. більше стосуються проектування цифрових пристроїв і не дають відповіді на способи дослідження самих часових логічних процесів. В роботі пропонується варіант математичного опису логіко-часових процесів.

Огляд та постановка задачі

На рівні обчислювальних пристроїв час, як правило, є критерієм для впорядкування послідовності операцій (програм) над даними і носить неявний характер. Навпаки, на рівні конкретних вузлів, час враховується у явному вигляді, забезпечуючи правильну роботу цифрового вузла і представлений на рівні тактів чи синхроімпульсів. Для комп'ютерної обробки в реальному часі аналоговий сигнал має бути перетворений в цифрову форму шляхом його дискретизації по часу на одиничні Δ-інтервали і квантуванням k рівнями по амплітуді. Графічне представлення цифрового сигналу є досить наочним, дозволяє виконувати попередню обробку сигналу, але не дає можливості робити глибоку його обробку комп'ютерними методами. Слід відмітити, що прогнозування зміни сигналу, представленого графічно, під впливом певних параметрів є практично неможливим. Для усунення вказаних недоліків достатньо відійти від фізичних параметрів носія сигналу та представити сигнал, що має фіксоване число рівнів квантування, у вигляді набору логічних значень у відповідні дискретні значення часу. В такому варіанті наочність зникає, але з'являється можливість використання комп'ютерної обробки, зазвичай за наперед заданими алгоритмами. Створення ж нових алгоритмів є результатом аналітичної обробки людиною вихідних сигналів і даних, отриманих в результаті комп'ютерного аналізу.

Аналітична обробка цифрових сигналів в графічному чи в чисто цифровому представлені практично дещо обмежена. Уявляється доцільною ідея заміни довільного цифрового сигналу (змінної), що змінюється в часі, якоюсь часовою логічною функцією, що може бути представлена, наприклад, поліномом. Це дає можливість полегшити попередню аналітичну обробку цифрових сигналів та змінних, використовуючи властивості таких функцій. Тому актуальною буде розробка математичного апарату, який в простій і доступній формі дозволить здійснювати аналітичну обробку цифрових сигналів, що змінюються в часі та здійснювати прогнозування змін параметрів сигналів суто засобами математики.

Логіко-часовими функціями (ЛЧФ) будемо називати такі логічні *k*-значні $(k \geq 2)$ функції, які змінюються в дискретному часі і можуть набувати одне із значень від 0 до *k*-1 на кожному Δ-інтервалі, що входить до якогось фіксованого кінцевого часового інтервалу існування змінних, за межами цього інтервалу функція дорівнює нулю [4]. При $k > 2$ – *k*-значну функцію будемо називати логіко-часовою функцією багатозначної лоніки (БЛЧФ). Моменти початку часових інтервалів існування t_i та їх тривалість T_i. дискретні. Значення t_i та T_i називають часовими координатами змінних. Наприклад, елементарна ЛЧФ (рис.1), область визначення якої складається лише з одного відрізка існування, в загальному вигляді має вид:

$$f(t,t_1,T_1,a_1)=\begin{cases} a_1, & \text{якщо } t_1 \leq t \leq t_1+T_1 \\ 0, & \text{якщо } t_1+T_1 < t < t_1 \end{cases}$$

де t – поточне дискретне значення параметру;
T_1 – інтервал існування функції;
a_1 – одне із *k* значень функції
t_1 – початок часового інтервалу
t_1+T_1 – кінець часового інтервалу

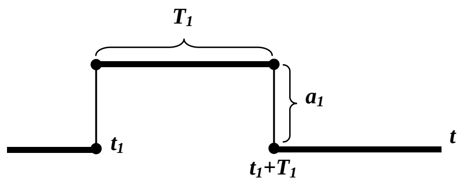


Рисунок 1 − Логіко-часова функція

Метою даної статті є представлення нового математичного апарату опису логіко-часових функцій багатозначної логіки та окремих операцій над ними з використанням моделювання відомих схем реалізації.

Основні положення

В загальному вигляді БЛЧФ з n відрізками існування можна записати так:

$$f(t,t_1,...,t_n,T_1,...,T_n,a_1,...,a_n) \tag{1}$$

Зауважимо, що запис (1) ЛЧФ не використовує значення $a_i \leq 0$ і така форма подання є досить громіздкою та незручною для обробки. В роботі [4] було доведено, що існує три функціонально повні класи ЛЧФ:

1. ЛЧФ, що між двома нулями приймає стале значення. Можливий вигляд такої функції наведено на рис. 1.
2. ЛЧФ, що має m часових координат, відрізки існування яких не перетинаються (див. рис. 2).
3. Монотонні ЛЧФ.

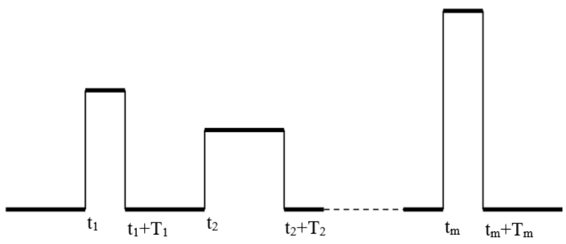


Рисунок 2 − Можливий варіант ЛЧФ, що має m часових координат відрізки існування яких не перетинаються

а) б)

Рисунок 3 − Можливі варіанти монотонної ЛЧФ: а) зростаюча ЛЧФ, б) спадна ЛЧФ

Можна показати, що функції другого та третього класів можна подати у вигляді накладання (суперпозиції, логічного додавання) ЛЧФ першого класу. Тоді, для позначення таких функцій доцільно використати модифікований плюс: « $\boxplus$ ». Крім того, дискретизація часу дозволяє координати початку часового інтервалу і інтервал існування конкретної функції задавати числом Δ-інтервалів (тактів) [4]. Пропонується вказувати ці значення відповідно як нижній та верхній індекси змінної. Для БЛЧФ, зображених на рис. 4, записуючи всі інтервали існування в порядку зростання початкового часового інтервалу, отримуємо:

$$x(t) = x_1^3 \boxplus x_{10}^1,$$
$$y(t) = y_1^1 \boxplus 2y_2^1 \boxplus y_3^2 \boxplus y_9^2.$$

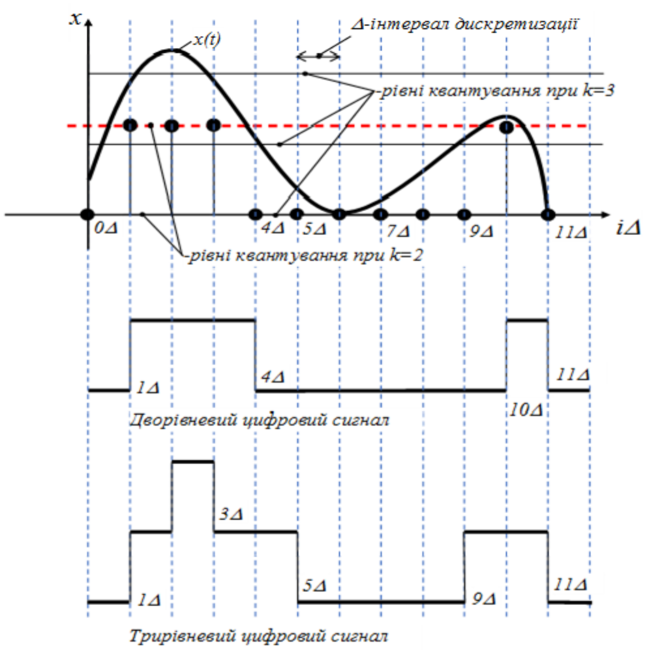


Рисунок 4 − Одержання ЛЧФ сигналу, шляхом квантування та дискретизації

Вираз типу $2y_2^1$ (або $a_{t_i} z_{t_i}^{T_i}$) традиційно сприймається як множення 2 на y_2^1, хоча 2 – це значення змінної амплітуди. Для виключення подвійного трактування логічні значення a_i записуємо у верхньому попередньому індексі: $y(t) = {}^1y_1^1 \boxplus {}^2y_2^1 \boxplus {}^1y_3^2 \boxplus {}^1y_9^2$

В загальному вигляді для індексів використовуємо прийняті раніше позначення T і тоді маємо:

$$z(t) = {}^{a_1} z_{t_1}^{T_1} \boxplus {}^{a_2} z_{t_2}^{T_2} \boxplus \cdots \boxplus {}^{a_{t_i}} z_{t_i}^{T_i} \boxplus \cdots \boxplus {}^{a_{t_n}} z_{t_n}^{T_n} \tag{2}$$

Запис (2) назвемо індексним. Фактично індексний запис тривалості амплітуд a_i, k-значних функцій, разом з початком інтервалів існування t_x, повністю характеризують ЛЧФ.

Для подальшого спрощення символьного позначення ЛЧФ введемо поняття продукуючого слова. Одномірним продукуючим словом A логіко-часової функції називається сукупність упорядкованої за часом множини одномісних аргументів тривалістю Δ типу $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{T-1}\}$ довжиною T:

$$A = {}^{z}A_{t_z}^{T_z} = \mathop{W_{t_z}^{T_z}}\limits_{i=0}^{T_z-1} a_i \,, \tag{3}$$

де W – оператор впорядкування за часом та розбиття значень аргументів ЛЧФ на одиничні Δ-інтервали, $T_z = T_0 + T_1 + T_2 + \cdots T_{N-1}$. i – порядковий номер інтервалу. Правий нижній та верхній індекси t_z і T_z, що записується у разі усунення неоднозначного трактування, вказує на початок та довжину слова, i-показує положення аргументу в слові та пробігає всі значення $0, 1, 2, \ldots, (T-1)$.

Тепер в найбільш загальному вигляді, маємо повну форму запису ЛЧФ k-значної логіки

$$_k z(t_i) = {}_k z_{t_z}^{T_z}(t_i) = \left. \left(\mathop{W}\limits_{i=0}^{T_z-1} a_i \right) \right|_k z_{t_z}^{T_z} \tag{4}$$

де t_i, як часова координата a_i, визначається співвідношенням $t_i = t_z + i$

$t_i \in \{t_z + 0, t_z + 1, t_z + i, \cdots, t_z + T_z - 1\}$, $a_i \in \{0, 1, \cdots k - 1\}$, індекс k вказує значність ЛЧФ.

Для конкретної 4-значної ЛЧФ (рис. 5) використання оператора впорядкування одномісних аргументів має такий вигляд:

$$_4 x(t) = {}_4 x_{t_x}^{T_x} = W\left(1^1, 2^2, 1^1, 3^4\right)\Big|_4 x_{t_x}^8 = (12213333)\Big|_4 x_{t_x}^8$$

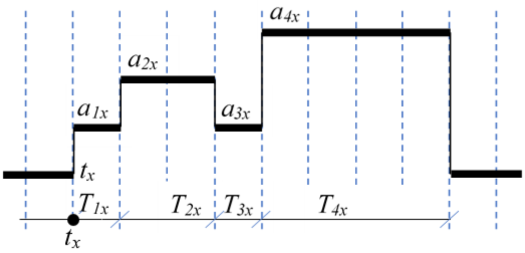


Рисунок 5 − Можливий варіант 4-значної ЛЧФ

В цілому, значення a_i − це логічні змінні, а числові змінні − це значення тривалості інтервалу існування і час його початку. З цього можна зробити висновок, що БЛЧФ допускають як логічні, так і арифметичні (алгебраїчні) операції.

Розглянемо, наприклад, функцію заперечення Лукасевича (інверсії), що для звичайної k-значної змінної визначається формулою: $\tilde{x} = (k-1) - x$. Для БЛЧФ в інтервалі існування $(t_x, t_x + T_x)$, це описується в загальному вигляді таким виразом:

$$\tilde{x} = \left((k-1) - a_0^{T_0}, (k-1) - a_1^{T_1}, \ldots, (k-1) - a_N^{T_N} \right) \Big|_k \, x_{t_x}^{T_x}, \tag{5}$$

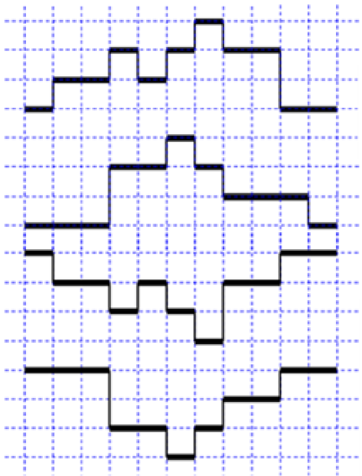
або в повній формі

$$\tilde{z}(t) = \tilde{z}_{t_z}^{T_z} = \mathop{W}_{i=0}^{T_z-1} \left((k-1) - a_i \right) \Big|_k \, z_{t_z}^{T_z}. \tag{6}$$

В разі потреби врахування значення функції за межами інтервалу існування потрібно вказати значення БЛЧФ в інтервалах $0 - t_0$ та $(t_n + T_n) - \infty$:

$$\tilde{x} = \left((k-1)_0^{t_0}, (k-1) - a_0^{T_0}, (k-1) - a_1^{T_1}, \ldots, (k-1) - a_N^{T_N}, (k-1)_{t_N+T_N}^{\infty} \right) \Big|_k \, x_{t_x}^{T_x}. \tag{7}$$

Приклади графіків заперечень Лукасевича для чотиризначної ЛЧФ наведено на рис. 6.



$${}_4x(t) = \left(1^2 2^1 1^1 2^1 3^1 2^2\right) \Big|_4 \, x_1^8$$

$${}_4y(t) = \left(2^2 3^1 2^1 1^3\right) \Big|_4 \, y_3^7$$

$${}_4\tilde{x}(t) = \left(3^1 2^2 1^1 2^1 0^1 2^2 3^\infty\right) \Big|_4 \, x_0^\infty$$

$${}_4y(t) = \left(3^3 1^2 0^1 1^1 2^2 3^\infty\right) \Big|_4 \, y_0^\infty$$

Рисунок 6 − Приклади реалізації заперечення Лукасевича

Для k-значних функцій часто використовується циклічне заперечення або заперечення Поста, що визначається формулою:

$$\vec{z}(t) = \vec{z}_{t_z}^{T_z} = \left(\mathop{W}_{i=0}^{T_z-1} (a_i + 1) \bmod k \right) \Big|_k \, \vec{z}_{t_z}^{T_z},$$

а також функція мінус x:

$$-x = (k - x) \bmod k. \tag{8}$$

Для позначення зсуву вліво чи вправо (випередження або затримка) використаємо оператор

$$D_t^s: D^s x_{t_x}^{T_x} = \left\{ \forall t : D^s x_{t_x}^{T_x} = x_{t_x+s}^{T_x} = \left(\mathop{\mathrm{W}}_{i=0}^{T_x-1} a_i \right) \Bigg|_k x_{t_x+s}^{T_x} \right\}, \tag{9}$$

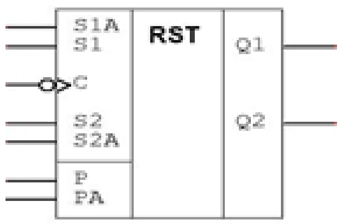
де s вказує на величину зсуву в Δ-інтервалах. Якщо s зі знаком «+», то маємо зсув вправо, а зі знаком «-» - зсув вліво. Даний оператор може мати параметри, що вказуються у відповідних індексах. Наявність нижнього індексу t вказує на час, від якого починається зсув. В такому випадку, символ D_t^s оператора зсуву може знаходитись в будь-якому місці виразу БЛЧФ, але раніше за t. Якщо нижній індекс відсутній, то зсув починається від значення функції, що слідує за оператором D^s від початкового Δ-інтервалу. Дія оператора D_t^s поширюється на весь інтервал існування функції, що знаходиться під знаком оператора справа від t до $t+s$. Просто D без індексів вказує на одиничний зсув. Як правило, значеннями функції, що при зсуві опинились за межами інтервалу існування або інтервалу зсуву, ігнорують. Якщо зсув починається з t_i, тоді отримаємо:

$$D_{t_i}^{-R} z(t) = D_{t_i}^{-R} z_{t_1}^{T} = z_{t_1}^{T_1} \oplus z_{t_2}^{T_2} \oplus \cdots \oplus z_{t_i-R}^{T_i} \oplus \cdots \oplus z_{t_n-R}^{T_n}. \tag{10}$$

Наприклад, для функції $y(t) = y_1^1 \oplus 2y_2^1 \oplus y_3^2 \oplus y_9^2$, при $s=-2$ БЛЧФ функція зсуву така: $D^{-2}{}_4 y = y_{-1}^1 \oplus {}^2 y_0^1 \oplus y_1^2 \oplus y_7^2$.

Схемо-технічна реалізація елементів та вузлів багатозначної логіки, як правило, будується на звичайних двійкових елементах з відповідним кодуванням. Наприклад, для трійкової логіки, про яку Д. Кнут сказав, що «заміна двійкового тригера на трійковий обов’язково станеться», можна використати таке кодування: «0»→00, «1» → 01 та «2» → 10. Трійкові елементи та вузли можуть будуватись, як з використанням різних кодових систем, так і з використанням різних фізичних принципів роботи елементів. Нас цікавлять трійкові вузли, що використовують звичайний двійковий код. Для моделювання розглянутих операцій використаємо трійковий тригер на базі двійкових логічних елементів і коду, що згаданий вище.

Трійковий тригер, що працює по фронту імпульсу, наприклад для регістрів зсуву або лічильний трійковий Т-трігер, можна побудувати по схемі M-S (Master-Slave), синтезувавши відповідну вхідну логіку на сигнали S_1 та S_2 для тригера М. На рис. 7 показане умовне позначення тригера для регістра зсуву.



Рисунокм 7− Трійковий MS-тригер

Тут одиниця на вході P дозволяє роботу входів S1 та S2, а відповідно PA – S1A та S2A. Комбінація сигналів 10 на S1S2 та S1AS2A встановлює в тригері «1» і навпаки, комбінація на входах 01 – встановлює «2». 11 на входах S1AS2A записує в тригер «0», а 00 зберігає стан тригера. Навпаки, вхідний сигнал 00 на входах S1S2 – зберігає інформацію в трійковому тригері рис. 7.

На рис. 8 представлена схема регістра зсуву на чотири тріти, розроблена з використанням програмного пакету NI Multisim 14.0 на віртуальних компонентах. В регістр, по командах генератора слів (XWG1), записується інформація (1201) з перемикача S3, а на схемах U109 та U110 реалізована функція заперечення Лукасевича. На рис. 9 маємо діаграми роботи схеми при генерації БЛЧФ правими трітами (розрядами) вперед.

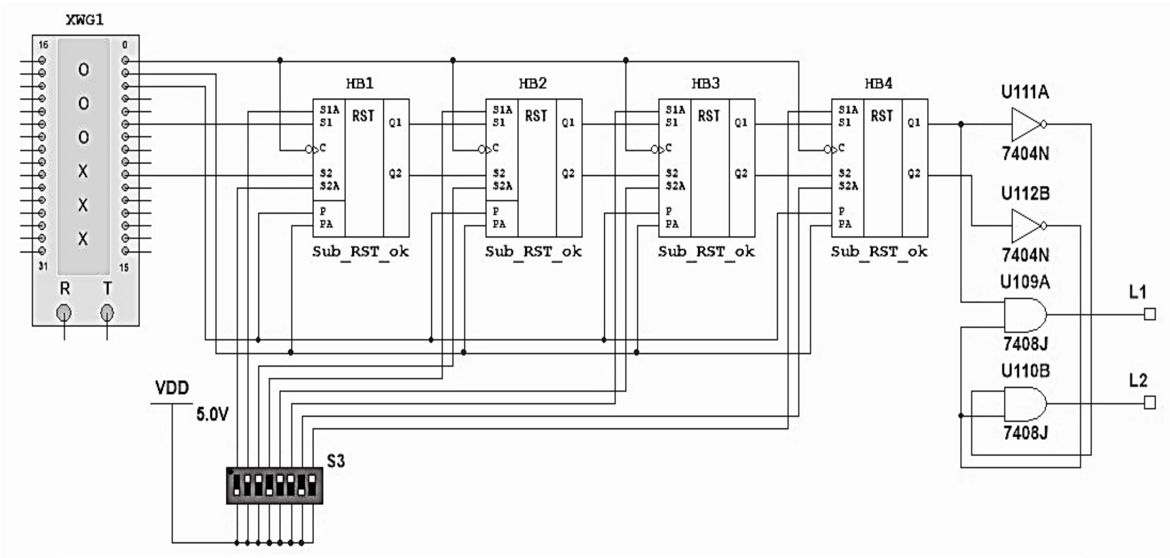


Рисунок 8 − Генерація БЛЧФ регістром зсуву і заперечення Лукасевича

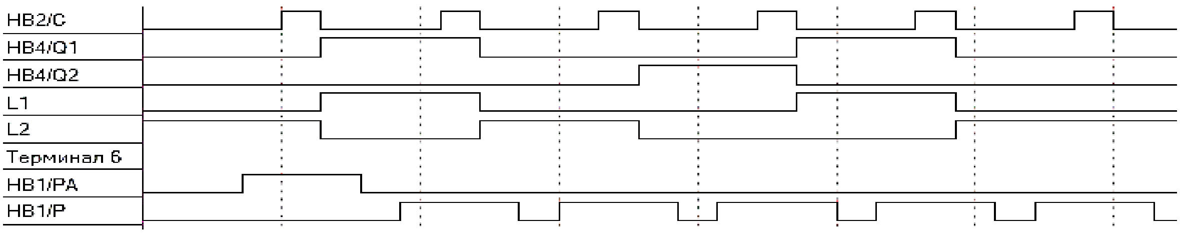


Рисунок 9 − Діаграми генерації БЛЧФ

Висновки

1. Запропонована індексна форма подання БЛЧФ, яка досить легка для сприйняття і дає змогу розглядати будь-які ЛЧФ як числову послідовність.
2. Для подальшого спрощення аналітичного представлення ЛЧФ розглянуто поняття продукуючого слова та введено оператор впорядкування за часом та розбиття значень аргументів на одиничні Δ-інтервали.
3. В якості базових операцій розглянуто операцію заперечення Лукасевича та операцію зсуву, які дозволять, в подальшому, ввести більш складні операції над БЛЧФ, такі як нерівнозначність, диференціювання та інтегрування і дослідити їх властивості.
4. Змодельовано генерацію БЛЧФ регістром зсуву і заперечення Лукасевича.
5. Запропоноване математичне представлення БЛЧФ дозволить використовувати їх для створення паролів, побудови крипто-ключів, прогнозування розвитку в часі деяких процесів і т. ін. [5].

Список літератури

[1] Ю. Я., Базилевский, *Вопросы теории временных логических функций. В кн.: Вопросы теории математических машин, сб. 1.* М., 1958, 30 с.

[2] Д. А. Поспелов, «Синтез схем, работа которых описывается временными булевыми функциями», *Автоматика и телемеханика*, том 21, выпуск 10, с. 1410−1413, 1960.

[3] З. Л. Рабинович, «Векторно-временные переключательные функции (ВП-функции) как язык для описания схем и процессов переработки информации», Кибернетика, № 3, с. 36−42, 1968.

[4] Н. В. Сачанюк-Кавецька, В. П. Кожем’яко, *Елементи око-процесорної обробки зображень в логіко-часовому середовищі. Монографія*. Вінниця, Україна: УНІВЕРСУМ, 2004, 135 с.

[5] Н. В. Сачанюк-Кавецька, І. О. Бондаренко, «Ідентифікація суб’єктів в системах контролю доступу за допомогою ідентифікаційної логіко-часової функції, як ефективний метод комплексного захисту інформації», *Оптико-електронні інформаційно-енергетичні технології,* №1(35), с. 14−23, 2018.

[6] N. Sachaniuk-Kavets″ka, V. Kozhemiako, W. Wojcik, D. Kassymkhanova, A. Kalizhnova (2015). «The use polynomials as a possible variant analytical processing on logic-time functions», *Optical Fibers and Their Applications 2015 Proceedings of SPIE*, 9816, Lublin, Poland.

[7] D. Michael Miller, Mitchell A. Thornton, *Multiple-Valued Logic: Concepts and Representations*, 2007, 127 p. [Online]. Available: https://ieeexplore.ieee.org/document/6813012/metrics#metrics. Accessed on: Jan. 05, 2022.

Стаття надійшла: 10.01.2022.

References

[1] Ju. Ja., Bazilevskij, *Voprosy teorii vremennyh logicheskih funkcij. V kn.: Voprosy teorii matematicheskih mashin*, sb. 1. M., 1958, 30 p. [in Russian].

[2] D. A. Pospelov, «Sintez shem, rabota kotoryh opisyvaetsja vremennymi bulevymi funkcija-mi», *Avtomatika i telemehanika*, tom 21, vypusk 10, s. 1410−1413, 1960 [in Russian].

[3] Z. L. Rabinovich, «Vektorno-vremennye perekljuchatel'nye funkcii (VP-funkcii) kak jazyk dlja opisanija shem i processov pererabotki informacii», *Kibernetika*, № 3, pp. 36−42, 1968 [in Russian].

[4] N. V. Sachaniuk-Kavetska, V. P. Kozhemiako, Elementy oko-protsesornoi obrobky zobrazhen v lohiko-chasovomu seredovyshchi. Monohrafiia. Vinnytsia, Ukraina: UNIVERSUM, 2004, 135 p. [in Ukrainian].

[5] N. V. Sachaniuk-Kavetska, I. O. Bondarenko, «Identyfikatsiia subiektiv v systemakh kontroliu dostupu za dopomohoiu identyfikatsiinoi lohiko-chasovoi funktsii, yak efektyvnyi metod kompleksnoho zakhystu informatsii», *Optoelectronic Information-Energy Technologies*, №1(35), pp. 14−23, 2018 [in Ukrainian].

[6] N. Sachaniuk-Kavets″ka, V. Kozhemiako, W. Wojcik, D. Kassymkhanova, A. Kalizhnova (2015). «The use polynomials as a possible variant analytical processing on logic-time functions», *Optical Fibers and Their Applications 2015 Proceedings of SPIE*, 9816, Lublin, Poland.

[7] D. Michael Miller, Mitchell A. Thornton, *Multiple-Valued Logic: Concepts and Representations*, 2007, 127 p. [Online]. Available: https://ieeexplore.ieee.org/document/6813012/metrics#metrics. Accessed on: Jan. 05, 2022.

Відомості про авторів

Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна − кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики.

Прозор Олена Петрівна − кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики.

N. Sachaniuk-Kavets'ka, O. Prozor

MATHEMATICAL DESCRIPTION OF LOGIC-TIME FUNCTIONS OF MULTIPLE-VALUED LOGIC AND SOME OPERATIONS OVER THEM

Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia

ДО ВІДОМА АВТОРІВ

Найновіші правила оформлення і подання статей знаходяться на сайті журналу
http://itce.vntu.edu.ua/